3,4 章および付録の数式に関する注意　　　　　2019.12.25

原著 3,4 章および付録の数式に関し，整合性が取れないと思われるもの，あるいは引用元の原論文と一致しないものが本書の翻訳過程で見つかったが，著作権の関係上，これらの数式は本文中にそのまま掲載している．

読者の参考のために，修正を要すると思われる数式を以下に示す．ただし，これらは定理の主要な主張や証明の流れに大きく影響を与えるものではない．

記法に関する全体的な注意

- ベクトル・行列を太字で記述している部分とそうでない部分がある．
  また，ベクトル・行列の成分を太字で記述している部分がある．
- 転置に $\mathbf{A}', \mathbf{A}^T$ の 2 種類の記号が使われており，統一されていない．
- 行列のサイズを記述する変数が節により異なる．
- 説明がないが，上付き添字「$-$」を複素共役の意味で用いる箇所がある．

個別の数式に関する注意

[3 章]

- p.45, (3.9)

$$\mathrm{spark}(\mathbf{A}) > 1 + \frac{1}{\mu(\mathbf{A})} \ \longrightarrow\ \mathrm{spark}(\mathbf{A}) \geq 1 + \frac{1}{\mu(\mathbf{A})}$$

- p.49, 3.8 節冒頭

$$\mu(\mathbf{A}) > \sqrt{\frac{N-M}{M(N-1)}} \longrightarrow \mu(\mathbf{A}) \geq \sqrt{\frac{N-M}{M(N-1)}}$$
$$\mu(\mathbf{A}) > 1\sqrt{2M} \longrightarrow \mu(\mathbf{A}) \geq 1\sqrt{2M}$$
$$1/\mu(\mathbf{A}) < \sqrt{2M} \longrightarrow 1/\mu(\mathbf{A}) \leq \sqrt{2M}$$

- p.51, (3.19) の下

  $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 - \mathbf{A}\mathbf{x}_2 > 0 \longrightarrow \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 - \mathbf{A}\mathbf{x}_2 \neq 0$

- p.51, (3.23)

$$\frac{1}{4}(\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|_2^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_2^2) \ \longrightarrow\ \frac{1}{4}(\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|_2^2 - \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_2^2)$$

- p.52, (3.25)

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{h}_{T_j}\|_2 &\le \sqrt{\sum_{i=kj}^{(k+1)j-1} |\mathbf{h}_i|^2} \le \sqrt{\sum_{i=kj}^{(k+1)j-1} \|\mathbf{h}_{T_j}\|_\infty^2} \\
&\le k^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{h}_{T_j}\|_{\ell_\infty} \le k^{\frac{1}{2}} \dot{k}^{-1} \sum_{i=(k-1)j}^{kj-1} |\mathbf{h}_i|^2 = k^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{h}_{T_{j-1}}\|_1 \\
\longrightarrow \|\mathbf{h}_{T_j}\|_2 &\le \sqrt{\sum_{i=jk}^{(j+1)k-1} |\mathbf{h}_i|^2} \le \sqrt{\sum_{i=jk}^{(j+1)k-1} \|\mathbf{h}_{T_j}\|_\infty^2} \\
&\le k^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{h}_{T_j}\|_{\ell_\infty} \le k^{\frac{1}{2}} k^{-1} \sum_{i=(j-1)k}^{jk-1} |\mathbf{h}_i| = k^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{h}_{T_{j-1}}\|_1
\end{aligned}$$

- p.52, (3.27)

$$\le \|\mathbf{x}_{T_0}\|_1 - \|\mathbf{h}_{T_0}\|_1 + \dots \quad \longrightarrow \quad \ge \|\mathbf{x}_{T_0}\|_1 - \|\mathbf{h}_{T_0}\|_1 + \dots$$

- p.52, (3.30)

$$\|\mathbf{h}_{T_0}\|_1 = \sum_{i<s} \mathbf{h}_i \cdot \mathrm{sign}(\mathbf{h}_i) \le \|\{\mathrm{sign}(\mathbf{h}_i)\}_{i<k}\|_2 \cdot \|\mathbf{h}_{T_0}\|_2$$

$$\longrightarrow \quad \|\mathbf{h}_{T_0}\|_1 = \sum_{i<k} \mathbf{h}_i \cdot \mathrm{sign}(\mathbf{h}_i) \le \sqrt{\sum_{i<k} (\mathrm{sign}(\mathbf{h}_i))^2} \cdot \|\mathbf{h}_{T_0}\|_2$$

[4 章]

- p.57, (4.4) および (4.5) の下, $\|\Phi(\omega)\| \longrightarrow \|\Phi(\omega)\mathbf{x}\|_{\ell_2^n}$
- p.57, Johnson-Lindenstrauss 補題

$$\begin{aligned}
& |Q|^2(\mathrm{Prob}[\|\Phi(\omega)\| \ge 1+\epsilon] + \mathrm{Prob}[\|\Phi(\omega)\| \ge 1-\epsilon]) < \dots. \\
\longrightarrow \quad & \sum_{\mathbf{u},\mathbf{v}\in Q} \Big(\mathrm{Prob}\Big[\|\Phi(\omega)(\mathbf{u}-\mathbf{v})\|_{\ell_2^n}^2 \ge (1+\epsilon)\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{\ell_2^N}^2 \Big] \\
& \quad + \mathrm{Prob}\Big[\|\Phi(\omega)(\mathbf{u}-\mathbf{v})\|_{\ell_2^n}^2 \le (1-\epsilon)\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{\ell_2^N}^2 \Big] \Big) < \dots.
\end{aligned}$$

- p.59, (4.8)

$$|\mathcal{N}'| \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^n \le (1+\epsilon)^n \quad \longrightarrow \quad |\mathcal{N}'| \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^n \le \left(1+\frac{\epsilon}{2}\right)^n$$

- p.59, (4.10)

$$\mathrm{Volume}(K+D) \ge \mathrm{Volume}\left(\bigcup_{1}^{N} (\mathbf{x}_i + D) \right)$$

$$\longrightarrow \quad \mathrm{Volume}(K+D) \ge \mathrm{Volume}\left(\bigcap_{i=1}^{N} (\mathbf{x}_i + D) \right)$$

- p.59, (4.14), $X_T \to T$
- p.60, (4.23) 以降, $(12/\delta) \to (9/\delta)$ (すべての因子について)
- p.62, (4.24) の上, $N \times n$ 行列 $\longrightarrow n \times N$ 行列
- p.62, (4.24) の上

$$\begin{aligned} &\mathbf{UU}' = \mathbf{I}_N \text{ かつ } \mathbf{U}'\mathbf{U} = \mathbf{VV}' = \mathbf{V}'\mathbf{V} = \mathbf{I}_n \\ \longrightarrow &\mathbf{UU}' = \mathbf{U}'\mathbf{U} = \mathbf{I}_n \text{ かつ } \mathbf{VV}' = \mathbf{V}'\mathbf{V} = \mathbf{I}_N \end{aligned}$$

- p.62, (4.24) の上, $n \times n$ 対角行列 $\mathbf{\Sigma} \longrightarrow n \times N$ 行列 $\mathbf{\Sigma}$
- p.62, (4.25)

$$\begin{aligned} & (1-\delta_k) \le s_{\min}^2 \le s_{\max}^2 < 1+\delta_k \\ \longrightarrow \quad & 1-\delta_k \le \min_{T\subset\mathbb{Z}_N,|T|\le k}(s_{\min}(\mathbf{A}|_T))^2 \le \max_{T\subset\mathbb{Z}_N,|T|\le k}(s_{\max}(\mathbf{A}|_T))^2 < 1+\delta_k \end{aligned}$$

- p.62, (4.27)

$$\begin{aligned} & \max_{T\subset\{1\ldots n\};|T|}\{|1-s_{\max}(\mathbf{A}|_T)|, |1-s_{\min}(\mathbf{A}|_T)|\} < \delta \\ \longrightarrow \quad & \max_{T\subset\mathbb{Z}_N,|T|\le k}\{|1-(s_{\max}(\mathbf{A}|_T))^2|, |1-(s_{\min}(\mathbf{A}|_T))^2|\} < \delta \end{aligned}$$

- p.62, (4.28), (4.29)

$$\begin{aligned} & 1-\delta^2 \le s_{\min}(\boldsymbol{A}|_T) = \min_{\|\mathbf{x}\|_2=1,\mathrm{supp}(\mathbf{x})\subset T}\|\mathbf{A}|_T\mathbf{x}\|_2 \\ & \quad \le \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1,\mathrm{supp}(\mathbf{x})\subset T}\|\mathbf{A}|_T\mathbf{x}\|_2 = s_{\max}(\boldsymbol{A}|_T) \le 1+\delta^2 \\ \longrightarrow \quad & 1-\delta \le \min_{T\subset\mathbb{Z}_N,|T|\le k}(s_{\min}(\boldsymbol{A}|_T))^2 = \min_{T\subset\mathbb{Z}_N,|T|\le k}\left\{\min_{\|\mathbf{x}\|_2=1,\mathrm{supp}(\mathbf{x})\subset T}\|\mathbf{A}|_T\mathbf{x}\|_2^2\right\} \\ & \le \max_{T\subset\mathbb{Z}_N,|T|\le k}\left\{\max_{\|\mathbf{x}\|_2=1,\mathrm{supp}(\mathbf{x})\subset T}\|\mathbf{A}|_T\mathbf{x}\|_2^2\right\} = \max_{T\subset\mathbb{Z}_N,|T|\le k}(s_{\max}(\boldsymbol{A}|_T))^2 \le 1+\delta \end{aligned}$$

- p.62, (4.29) の下, $\delta_k \le \delta^2 \longrightarrow \delta_k \le \delta$
- p.63, 定理 4.4, 列ベクトル $\longrightarrow$ 行ベクトル
- p.63, 定理 4.4, $1-5n^{-c\tau} \longrightarrow 1-5e^{-c\tau}$
- p.63, (4.33)

$$\begin{aligned} & N \ge C(K)\tau k\log^2(n)\log(C(K)\tau k\log^2(n))\log^2(k) \\ \longrightarrow \quad & n \ge C(K)\tau k\log N\log\big(C(K)\tau k\log N\big)\log^2(k) \end{aligned}$$

- p.64, (4.35) の上, 列ベクトル $\longrightarrow$ 行ベクトル
  加えてここで $\sqrt{n}\mathbf{A} \to \mathbf{A}$ とスケーリングしていると考えられる.
  E の評価を行う際，(4.26) との対応に注意.

- p.64, (4.35)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N}\mathbf{A}|_T^*\mathbf{A}|_T - \mathbf{I}_d = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{A}_i|_T \otimes \mathbf{A}_i|_T - \mathbf{I}_d = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \\ \longrightarrow \quad & \frac{1}{n}\mathbf{A}|_T^*\mathbf{A}|_T - \mathbf{I}_d = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{A}_i|_T \otimes \mathbf{A}_i|_T - \mathbf{I}_d = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i|_T \end{aligned}$$

- p.64 (4.35) の下, $X_i = \mathbf{A}_i|_T \otimes \mathbf{A}_i|_T - \mathbf{I}_d \longrightarrow X_i|_T = \mathbf{A}_i|_T \otimes \mathbf{A}_i|_T - \mathbf{I}_d$

- p.64, (4.36)

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[\sup_{T\subset\mathbb{Z}_k}\left\|\sum_{i=1}^{N}(X_{iT} - \mathbb{E}[X_{iT}])\right\|\right] \le 2\mathbb{E}\left[\sup_{T\subset\mathbb{Z}_k}\left\|\sum_{i=1}^{N}\epsilon_i X_{iT}\right\|\right] \\ \longrightarrow \quad & \mathbb{E}\left[\sup_{T\subset\mathbb{Z}_N}\left\|\sum_{i=1}^{n}(X_i|_T - \mathbb{E}[X_i|_T])\right\|\right] \le 2\mathbb{E}\left[\sup_{T\subset\mathbb{Z}_N}\left\|\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i X_i|_T\right\|\right] \end{aligned}$$

- p.64, (4.37) の上, $\mathbb{R}^n$ 中の列ベクトル $\longrightarrow$ $\mathbb{R}^{|T|\times|T|}$ 中の行列

- p.64, (4.37)

$$\|X\| = \|X\|_{\mathbb{R}^n} + \max_{T\subset\mathbb{Z}_k, |T|<d}\|X|_T\|_{\mathbb{R}^n} \;\longrightarrow\; \|X\| = \max_{T\subset\mathbb{Z}_N, |T|<k}\|X|_T\|_{\mathbb{R}^{|T|\times|T|}}$$

- p.64, (4.37) の下

$$E = \frac{1}{N}\mathbb{E}[\cdots] \longrightarrow E = \frac{1}{n}\mathbb{E}[\cdots]$$

- p.64, (4.38) の上, $X_j = \mathbf{A}_j \otimes \mathbf{A}_j \longrightarrow X_j = \mathbf{A}_j \otimes \mathbf{A}_j - \mathbf{I}_N$

- p.64, (4.38)

$$E \le \frac{2}{N}\mathbb{E}[\cdots] \longrightarrow E \le \frac{2}{n}\mathbb{E}[\cdots]$$

- p.65, (4.40)

$$\begin{aligned} & \le \phi(p,m,l)\sqrt{p}\;\mathbb{E}\left[\max_{T\subset Z_m, |T|<p}\left\|\sum_{i=1}^{l}\mathbf{x}_i|_T \otimes \mathbf{x}_i|_T\right\|^{\frac{1}{2}}\right] \\ \longrightarrow \quad & \le \phi(p,m,l)\sqrt{p}\;\left\{\max_{T\subset Z_m, |T|<p}\left\|\sum_{i=1}^{l}\mathbf{x}_i|_T \otimes \mathbf{x}_i|_T\right\|\right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

- p.65, (4.41), (4.42)

$$
\begin{aligned}
E \leq & \frac{\phi(k,n,N)\sqrt{k}}{N}\ \mathbb{E}\left[\max_{T\subset\mathbb{Z}_N,|T|\leq k}\left\|\sum_{j\in\mathbb{Z}_N}\mathbf{x}_j|_T\otimes\mathbf{x}_j|_T\right\|^{\frac{1}{2}}\right] \\
= & \frac{\phi(k,n,N)\sqrt{k}}{\sqrt{N}}\ \mathbb{E}\left[\max_{T\subset\mathbb{Z}_N,|T|\leq k}\left\|\frac{1}{N}\mathbf{A}|_T\otimes\mathbf{A}|_T\right\|^{\frac{1}{2}}\right] \\
\longrightarrow\quad E \leq & \frac{\phi(k,N,n)\sqrt{k}}{n}\left\{\ \mathbb{E}\left[\max_{T\subset\mathbb{Z}_N,|T|\leq k}\left\|\sum_{j\in\mathbb{Z}_n}\mathbf{A}_j|_T\otimes\mathbf{A}_j|_T\right\|\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \\
= & \frac{\phi(k,N,n)\sqrt{k}}{\sqrt{n}}\left\{\ \mathbb{E}\left[\max_{T\subset\mathbb{Z}_N,|T|\leq k}\left\|\frac{1}{n}\mathbf{A}|_T\otimes\mathbf{A}|_T\right\|\right]\right\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

- p.65, (4.43), (4.44)

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[\max_{T\subset\mathbb{Z}_N,|T|\leq k}\left\|\frac{1}{N}\mathbf{A}|_T\otimes\mathbf{A}|_T\right\|\right] \\
& \leq \mathbb{E}\left[\max_{T\subset\mathbb{Z}_N,|T|\leq k}\left\|\frac{1}{N}\mathbf{A}|_T\otimes\mathbf{A}|_T-\mathbf{I}_k\right\|+||\mathbf{I}_k||\right]=E+1 \\
\longrightarrow\quad & \mathbb{E}\left[\max_{T\subset\mathbb{Z}_N,|T|\leq k}\left\|\frac{1}{n}\mathbf{A}|_T\otimes\mathbf{A}|_T\right\|\right] \\
& \leq \mathbb{E}\left[\max_{T\subset\mathbb{Z}_N,|T|\leq k}\left\|\frac{1}{n}\mathbf{A}|_T\otimes\mathbf{A}|_T-\mathbf{I}_d\right\|+||\mathbf{I}_d||\right]=E+1
\end{aligned}
$$

- p.65, (4.45)

$$
E\leq\phi(k,n,N)\sqrt{\frac{k}{N}}(E+1)^{\frac{1}{2}}\ \longrightarrow\ E\leq\phi(k,N,n)\sqrt{\frac{k}{n}}(E+1)^{\frac{1}{2}}
$$

- p.65, (4.45) の下

$$
a=\phi(k,n,N)\sqrt{\frac{k}{N}}\ \longrightarrow\ a=\phi(k,N,n)\sqrt{\frac{k}{n}}
$$

- p.66, (4.46)

$$
\begin{aligned}
& E\leq 2a=2C_K\log(k)\sqrt{\frac{k\ \log(n)\log(N)}{N}} \\
\longrightarrow\quad & E\leq 2a=2C_K\log(k)\sqrt{\frac{k\ \log(n)\log(N)}{n}}
\end{aligned}
$$

- p.66, (4.47)

$$
\frac{N}{\log(N)}\geq C_K\delta^{-2}\log^2(k)\,k\ \log(n)\ \longrightarrow\ \frac{n}{\log(N)}\geq C_K\delta^{-2}\log^2(k)\,k\ \log(n)
$$

加えて (4.47) 以降の δ は，(4.27) 以降の δ と同じものではないと考えられるので，注意が必要.

- p.66, (4.48)

$$
\begin{aligned}
& N \geq C_K \delta^{-2} \log^2(k)\, k\, \log(n) \log(\delta^{-2} \log^2(k)\, k\, \log(n)) \\
\longrightarrow\ & n \geq C_K \delta^{-2} \log^2(k)\, k\, \log(N) \log(\delta^{-2} \log^2(k)\, k\, \log(N))
\end{aligned}
$$

- p.66, (4.48) の下
$\log(k)\sqrt{\dfrac{k\ \log(n)\log(N)}{N}} \ \longrightarrow\ \log(k)\sqrt{\dfrac{k\ \log(n)\log(N)}{n}}$

- p.66, (4.48) の下, $1 - n^{-c\tau} \longrightarrow 1 - 5e^{-c\tau}$

- p.66, (4.50), (4.51) とその前後, $|T| \leq k \longrightarrow |T| \leq p$

- p.66, (4.51)

$$
\begin{aligned}
& = \sup_{T \subset \mathbb{Z}_q, |T| \leq k} \left[\sum_i^N \left(< X_i|_T, \mathbf{x} >^2 - < X_i|_T, \mathbf{y} >^2 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
\longrightarrow\ & = \sup_{T \subset \mathbb{Z}_m, |T| \leq p} \left[\sum_i^l \left(< X_i|_T, \mathbf{x} >^2 - < X_i|_T, \mathbf{y} >^2 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

- pp.67-69, 4.4.1 節内すべて, $B_{1X} \longrightarrow B_X$

- p.69, (4.66) の下

$$CRK \log(K)\sqrt{p}\log(p)\sqrt{\log(m)}$$

$\longrightarrow$ 本書では触れていないが，原論文ではより詳細な評価により $CRK \log(K)\sqrt{p}\log(p)\sqrt{\log(m)\log(l)}$ となる．

- pp.69-71, 4.4.2 節内すべて, $n \longrightarrow N,\ \ k \longrightarrow n,\ \ r \longrightarrow k$ と置き換え．

- p.70, (4.67)

$$
\sup_{T \subset \mathbb{Z}_n, |T| \leq p} \left\| \sum_{i \in \mathbb{Z}_n} X_i|_T \otimes X_i|_T - \mathbf{I} \right\| \ \longrightarrow\ \sup_{T \subset \mathbb{Z}_N, |T| \leq k} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i \in \mathbb{Z}_n} X_i|_T \otimes X_i|_T - \mathbf{I} \right\|
$$

- p.70, (4.68), すべての $\epsilon \longrightarrow \delta$ と置き換え．

- p.71, (4.77) の下, $l \leq q \longrightarrow l \geq q$

- p.71, (4.78) の下, 式 (4.69) を $\ldots \longrightarrow$ 式 (4.68) $\ldots$

- p.71, (4.79) の上, $C(K)s\delta/r > 1/\delta^2,\ \longrightarrow\ C(K)s\delta n/r > 1/\delta^2$

- p.71, (4.79) の下, $t = 1/\delta^2 \longrightarrow \tau = 1/\delta^2$ (δ_r については原論文を参照．)

[付録]

- p.202, (A.42) の上, $d(T) \leq 2^{j_0} \longrightarrow d(T) \leq 2^{-j_0}$
- p.202, (A.42)

$$\sum_{j=-j_0}^{\infty} 2^{-j}\sqrt{\log N(T,d,\epsilon)} \quad \longrightarrow \quad \sum_{j=j_0}^{\infty} 2^{-j}\sqrt{\log N(T,d,2^{-j})}$$

- p.203, (A.46) およびその上の不等式

$$e^{\frac{ca_j^2}{16\cdot 2^{2j}}} \quad \longrightarrow \quad e^{-\frac{ca_j^2}{16\cdot 2^{-2j}}}$$

- p.203, (A.46) の下

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{4}{\sqrt{c}}2^{-j}\cdot(\sqrt{\log N_j}+\sqrt{j-j_0+2}+s) \\ \longrightarrow \quad a_j &= \frac{4}{\sqrt{c}}2^{-j}8s\left(\sqrt{\log N_j}+\sqrt{j-j_0+2}\right) \end{aligned}$$

- p.203, (A.47) の上

$$\begin{aligned} \sum_{j=j_0}^{\infty} a_j &\leq C\sum_{j=j_0}^{\infty} 2^{-j}(\sqrt{\log N_j}+\sqrt{j-j_0+2}) \\ &\leq CM_2 + sd(T) + CM_2 \leq CM_2\cdot s \\ \longrightarrow \quad \sum_{j=j_0}^{\infty} a_j &\leq C\sum_{j=j_0}^{\infty} 2^{-j}s(\sqrt{\log N_j}+\sqrt{j-j_0+2}) \\ &\leq C'M_2 s \end{aligned}$$

(C' は再定義した定数．)

- p.203, (A.48)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sup_{t\in T}\|V_t\|\right] &= \int_0^{\infty} x\mathrm{Prob}\left[\left\{\sup_{t\in T}\|V_t\| > x\right\}\right]dx \\ &\leq CM + \int_{CM}^{\infty} xe^{-x^2/CM}dx \leq CM \\ \longrightarrow \quad \mathbb{E}\left[\sup_{t\in T}\|V_t\|\right] &= \int_0^{\infty}\mathrm{Prob}\left[\sup_{t\in T}\|V_t\| > x\right]dx \leq \int_0^{\infty} e^{-Cx^2/M^2}dx \leq C'M \end{aligned}$$

(C' は再定義した定数．)